数理解析研究所講究録
349巻 1979年 51-55

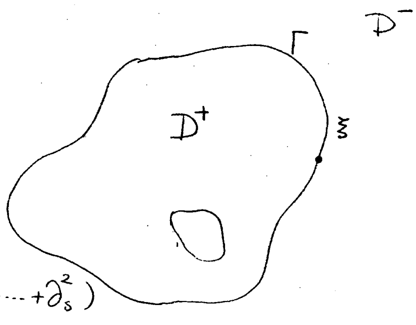


# モノドロミー保存変分方程式

京大数理研　三輪　哲二
神保　道夫

高次元の holonomic quantum fields は *local field theory* でなく，広がりを持つ物体（BAG？）を対象として構成される。それに応じてEuclid時空での対応する変形理論も，Hadamard型の変分公式の形で自然に拡張することができる。詳細は [1] [2] を見て下さい。ここでは基本的な考え方のみを述べる。

1. 次の設定のもとに，Euclidean Dirac 方程式に対する Riemann-Hilbert の問題を考えよう．




$D^+$：$\mathbb{R}^s$の有界領域，$D^-$：外部領域

$\Gamma = \partial D^+$ (*)

$M(\xi)$：Γ上のサイズNの行列(*)

$\not\partial = \gamma^1\partial_1 + \cdots + \gamma^s\partial_s \qquad (\not\partial^2 = \Delta = \partial_1^2 + \cdots + \partial_s^2)$

但しガンマ行列は $\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta^{\mu\nu}$ をみたすサイズ r の行列とする。

$m$：正又は0の定数

(*) 実解析的。

問題 $(\Gamma, M)$： 次の性質をもつ $rN\times rN$ 行列 $W$ を求む。

(1)　(i) $(-\partial\!\!\!/_x + m)W(x,x') = \delta^s(x-x')$　　$(x, x'\notin\Gamma)$

(ii) $|W(x,x')| = \begin{cases} O(e^{-m|x|}) & (m>0) \\ O\left(\dfrac{1}{|x|^{s-1}}\right) & (m=0) \end{cases}$　as $|x|\to\infty$

(iii) $W(\xi^+, x') = M(\xi)\,W(\xi^-, x')$　　$\xi\in\Gamma$

(但し $W(\xi^\pm, x') = \lim\limits_{D^\pm\ni x\to\xi} W(x,x')$ )

"モノドロミー行列" $M(\xi)$ が十分 1 に近ければ，解である $W(x,x')$ は存在して一意的である。

特に 2次元，massless ($m=0$) の場合，$W$ は次の形をとる。

(2)
$$W = -\frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{z-z'}Y(z,z') \\ \dfrac{1}{\bar z-\bar z'}Y^*(\bar z,\bar z') & 0 \end{pmatrix}$$

$$Y^*(\bar z,\bar z') = Y^*(\bar z,\bar z';\Gamma, M) = \overline{Y(z,z';\Gamma,\bar M)}$$

ここに $Y(z,z')$ は $\mathbb{P}^1-\Gamma$ 上正則で

(3)　$Y(z,z) = 1$,　$Y(\xi^+, z') = M(\xi)\,Y(\xi^-, z')$　( $\xi\in\Gamma$ )

を満たす。

通例 Riemann-Hilbert 問題の高次元化と言うと，多変数の正則函数で (iii) にあたる条件を課したものを考えるが，上のように (3) を実2次元における $\bar\partial Y=0$ の解の中で考える立場も、一つの自然な拡張と言えるだろう。

2. 以下，上の "Green 函数" $W(x,x')$ を境界 $\Gamma$ の汎函数と考えたときの変分を問題とする。即ち，$\Gamma$ をあるベクトル

場 $\sum_{\mu=1}^{s}\rho^{\mu}(\xi)\partial_{\mu}$ に沿って動かし $\Gamma^{\rho}=\{\,\xi+\rho(\xi)\mid\xi\in\Gamma\,\}$ とする。この時モノドロミーは $\Gamma^{\rho}$ 上では $M^{\rho}(\xi^{\rho})=M(\xi)$ ($\xi^{\rho}=\xi+\rho(\xi)$, $\xi\in\Gamma$) と与える。対応する Green 函数 $W^{\rho}(x,x')$ を $\rho$ の汎函数とみて $\rho=0$ での変分を $\delta W(x,x')$ と書けば,

公式

(4) $$\delta W(x,x')=\int_{\Gamma}d\sigma(\xi)\sum_{\mu=1}^{s}\delta\rho^{\mu}(\xi)\,W(x,\xi^{+})\cdot(n_{\mu}\not\partial-\not n\,\partial_{\mu})M(\xi)\cdot W(\xi^{-},x')$$

($(n_1(\xi),\cdots,n_s(\xi))$ は $\xi\in\Gamma$ での単位外法線

$\not n=\sum_{\mu=1}^{s}\gamma^{\mu}n_{\mu}$, $d\sigma$ : 面要素 )

上の公式で境界値をとることにより, $W(x,\xi^{+})$, $W(\xi^{-},\eta^{+})$ 等についても同様の公式が得られる。

また，平行移動及び回転に対する $W(x,x')$ の共変性と(4)を用いると，微分積分方程式を得る(類似の事情が P. Lévy [ ] によって指摘されている)。今 $W(x,\eta^{+})$ と $W(\xi^{-},\eta^{+})$ について結果をまとめると

(5) $$\delta' W(x,\eta^{+})=\int_{\Gamma}d\sigma(\zeta)\sum_{\mu=1}^{s}\delta\rho^{\mu}(\zeta)\cdot W(x,\zeta)\cdot(n_{\mu}\not\partial-\not n\,\partial_{\mu})M(\zeta)\cdot W(\zeta^{-},\eta^{+})+\sum_{\mu=1}^{s}\delta\rho^{\mu}(\eta)\,\partial^{\eta}_{\mu}W(x,\eta^{+})$$

(6) $$\partial^{x}_{\mu}W(x,\eta^{+})+\int_{\Gamma}d\sigma(\xi)\,W(x,\xi^{+})\cdot(n_{\mu}\not\partial-\not n\,\partial_{\mu})M(\xi)\cdot W(\xi^{-},\eta^{+})+\partial^{\eta}_{\mu}W(x,\eta^{+})=0$$

(7) $$\left((x^{\mu}-\eta^{\mu})\partial^{x}_{\nu}-(x^{\nu}-\eta^{\nu})\partial^{x}_{\mu}\right)W(x,\eta^{+})+\frac{1}{2}[\gamma^{\mu\nu},W(x,\eta^{+})]+\int_{\Gamma}d\sigma(\xi)\,W(x,\xi^{+})\cdot\Big(\big(n_{\nu}(\xi^{\mu}-\eta^{\mu})-n_{\mu}(\xi^{\nu}-\eta^{\nu})\big)\not\partial-\not n\big((\xi^{\mu}-\eta^{\mu})\partial_{\nu}-(\xi^{\nu}-\eta^{\nu})\partial_{\mu}\big)\Big)M(\xi)\cdot W(\xi^{-},\eta^{+})=0$$

$$(8)\quad {}'\delta' W(\xi^-, \eta^+) = \int_{\Gamma_s} d\sigma(\zeta) \sum_{\mu=1}^{s} \delta\rho^\mu(\zeta)\, W(\xi^-, \zeta^+) \cdot (\eta_\mu \not\partial - \not\eta \partial_\mu) M(\zeta) \cdot W(\zeta^-, \eta^+)$$
$$+ \sum_{\mu=1}^{s} \delta\rho^\mu(\xi)\, \partial_\mu^\xi W(\xi^-, \eta^+) + \sum_{\mu=1}^{s} \delta\rho^\mu(\eta)\, \partial_\mu^\eta W(\xi^-, \eta^+)$$

ここで $\delta' W(x, \eta^+)$ は，$W^\rho(x, \eta^{\rho +}) - W(x, \eta^+)$ $(\eta \in \Gamma)$ の一次の項を表わす（変数 $\eta$ は境界上に固定して変分する）。${}'\delta' W(\xi^-, \eta^+)$ の意味も同様。また，Euclidean Dirac 方程式を用いれば、$\partial_\mu^\eta W(x, \eta^+)$ 等は $\eta$ の tangential な微分のみを含む形に書き直すことができる。例：$\partial_\mu^\xi W(\xi^-, \eta^+) = (\partial_\mu^\xi - \eta_\mu(\xi) \not n(\xi) \not\partial^\xi + m \cdot \eta_\mu(\xi) \not n(\xi)) \times W(\xi^-, \eta^+)$.

さて，これらはいずれも $W$ について非線型の方程式系であるが，今 $W(\xi^-, \eta^+)$ を未知の係数の如く考えれば，(5)+(6)+(7) は $W(x, \eta^+)$ に関し線型である。そして非線型の方程式系 (8) が，係数 $W(\xi^-, \eta^+)$ を支配している。実は (8) は (5) の完全積分可能性を保証する方程式なのである。（即ち $\frac{\delta}{\delta\rho^\mu(\xi)}\left(\frac{\delta}{\delta\rho^\nu(\eta)} W\right) = \frac{\delta}{\delta\rho^\nu(\eta)}\left(\frac{\delta}{\delta\rho^\mu(\xi)} W\right)$．第二変分は煩雑なのでここには書かない．[1] 参照）。この意味で (5)+(6)+(7) は 2 次元の（線型）extended holonomic system に，(8) はその"変形の方程式"に，それぞれ対応している [2]。

文献

[1] M. Jimbo and T. Miwa, RIMS preprint 273 (1978).

[2] ———, RIMS preprint 27 (1978).

[3] P. Lévy, Problèmes concrets d'analyse fonctionelle, Gauthier-Villars, Paris (1951).